1 Введение

Управление объектом, имеющим много степеней подвижности, довольно сложная задача. Она ещё усложняется, если степени подвижности влияют друг на друга и если количество и/или расположение движителей не соответствует степеням подвижности.

Рассмотрим задачу в общем виде.

Пусть есть объект управления (ОУ), описываемый следующим дифференциальным уравнением:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.1) |

где – управление, зависящее (вообще говоря) от времени;

– время;

– функция управления;

– управляемая величина:

– *i*-я производная по времени ().

Под управляемой величиной будем понимать три параметра: положение, скорость (производную от положения) и ускорение (производную от скорости). Поэтому, в системе уравнений (1.1) *i*-я производная может быть и отрицательной – то есть, будем считать – интегралом от , а - интегралом от интеграла и т.д. То есть, если управляемой величиной является положение, то

если управляем скоростью –

Управляя же ускорением, имеем

Задача классическая: создать такое управление, чтобы рассогласование между заданием и текущим положением (отработкой) было минимальным. Рассмотрим некоторое текущее состояние ОУ, которое назовём начальным:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2) |

где – рассогласование и текущее рассогласование системы;

– *i*-я производная рассогласования по времени.

Естественно, что наличие констант задания не меняет величины производных, поэтому логично систему состояний (1.2) переписать в следующем виде:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.3) |

Для решения поставленной задачи логично постараться свести все текущие операторы рассогласования к нулю. Здесь можно предложить параметризованную функцию , которая даст траектории движения ОУ к цели в фазовом пространстве, и количество параметров которой равно удвоенному порядку дифференциального уравнения (1.1) плюс 2, то есть, *2n*. Для определения этих параметров требуется решить систему уравнений, естественно вытекающих из системы (1.3). Но в системе (1.3) всего *n* уравнений, поэтому требуется расширить систему (1.3) условиями в целевом состоянии:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.4) |

То есть для определения параметров функции , требуется решить систему из *2n* уравнений, описывающую состояния ОУ в начальный и в конечный момент времени, т.е. в системы (1.3) и (1.4) подставить соответствующие производные от *f*.

Получив таким образом функцию управляемого параметра от времени , подставляем её в уравнение (1.1). Получаем требуемое управление.

Здесь есть дополнительная сложность. Дело в том, что скорость изменения управления ограничена. Поэтому единственный такт управления, скорее всего, не сможет полностью погасить рассогласование. Отсюда возникает дополнительный параметр – время на выполнение операции. Его можно определить исходя из выражения

где , естественно, максимальная скорость роста управления. И ещё: само управление ограничено по величине. То есть имеем ещё одно выражение для определения управляющей фазовой траектории

Тем не менее, этого можно не делать, то есть не находить время на выполнения операции . Дело в том, что реальное устройство привода объекта управления и так имеет как некоторую определённую разгонную характеристику, так и определённое максимальное значение, и их не превысить. Более того, как показано чуть ниже, даже знание этих характеристик не является строго обязательным.

Теперь будем рассматривать реальную цифровую СУ с тактом управления, который здесь обозначим . Пусть на каждом такте управления считается, что управляется «с нуля». То есть, функцию «отвязываем» от параметра времени и делаем константой ***на каждом такте***, где в качестве времени применяем длительность одного такта (то есть, считаем t = временем одного такта).

Пусть также в качестве фазовой траектории управляемой величины выбираем полиномиальную функцию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.5) |

Полином выбран по причине того, что кривую нечётной степени можно настроить не только на требующиеся значения, но и требующиеся производные на концах отрезка.

Далее составляем две системы уравнений (1.3) и (1.4) и после упрощений получаем результат

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.6) |

где – рассогласование управляемой величины;

– текущая производная управляемой величины;

– текущая производная .

Нет никаких противоречий в том, чтобы считать текущее время начальным (т.е. нулевым), время следующего такта равным времени такта управления , а время на всё управление считаем двойным тактом .

При таких допущениях получаем компактные формулы для величины, скорости и ускорения (не зависящие от управляемого объекта):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.7) |

Здесь специально введены обозначения , и чтобы их не путать с производными по времени, обозначаемыми точками.

Для иллюстрации рассмотрим простые примеры. Сложные случаи будут приведены в последующих главах.

Пусть имеется звено 2-го порядка, описывающееся уравнением:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.8) |
|  |  |  |

где *A, B, C* – константы;

- управляемая величина.

Пусть также в качестве управляемой величины выбрана полиномиальная функция (1.5).

Подставляя (1.6) в уравнение (1.8) и упрощая[[1]](#footnote-1) получаем громоздкое выражение для управления

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.9) |

Определить величину , как говорилось выше, можно по величине изменения управления. Здесь надо заметить, что лишь на концах отрезка производная от функции (1.8) максимальна по абсолютной величине – см. рисунок 1.1, где приводится график для конкретных параметров.



Рисунок 1.1 – График функции управления

Рассмотрим внимательнее формулу (1.8). В ней специально сгруппированы величины при , и . Так как параметр времени всегда равен длительности такта управления (т.е., на каждом такте управляем «как в первый раз»), а параметр длительности управления есть , то в скобках при , и находятся константы. То есть закон управления, в общем виде, выглядит следующим образом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.10) |

Вспомнив, что является производной от и т.д. видим, что это аналитический вывод ПИД-регулятора.

То есть, формулы (1.9) и (1.10) – пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-регулятор) – дифференциальный регулятор 2-го порядка. Причём, надо заметить, что этот регулятор *адаптивный*, так как коэффициенты вычисляются не один раз и навсегда, как в классическом ПИД-регуляторе, а на **каждом такте управления** в зависимости от текущих рассогласований.

В общем виде дифференциальный регулятор *n*-ного порядка выглядит следующим образом:

На практике же, регулятор выше 2-го порядка использовать проблематично.

Второй пример.

Пусть имеется подводный аппарат, одна степень подвижности которого описывается *нелинейным* дифференциальным уравнением

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.11) |

где и – константы,

– скорость аппарата.

Первое слагаемое правой части – закон Ньютона (), второе – закон гидродинамического сопротивления, которое пропорционально квадрату скорости. Отличие от первого примера в том, что тут зависимость не линейна.

Для этого объекта хочется минимизировать положение, т.е. интеграл от управляемой величины – скорости. Поэтому в качестве пожелания рассмотрим полином пятой же степени, но уже для положения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.12) |

Поступая способом, полностью аналогичным первому примеру, получаем зависимость управления:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | +  +  + | (1.13) |

Здесь по причине нелинейности уравнения динамики (1.11) получили нелинейный ПИД-регулятор.

Разумеется, использовать такие сложные формулы, как (1.9) и (1.13), на практике невозможно. Поэтому их применение осуществляется так, как показано на рисунке 1.2.

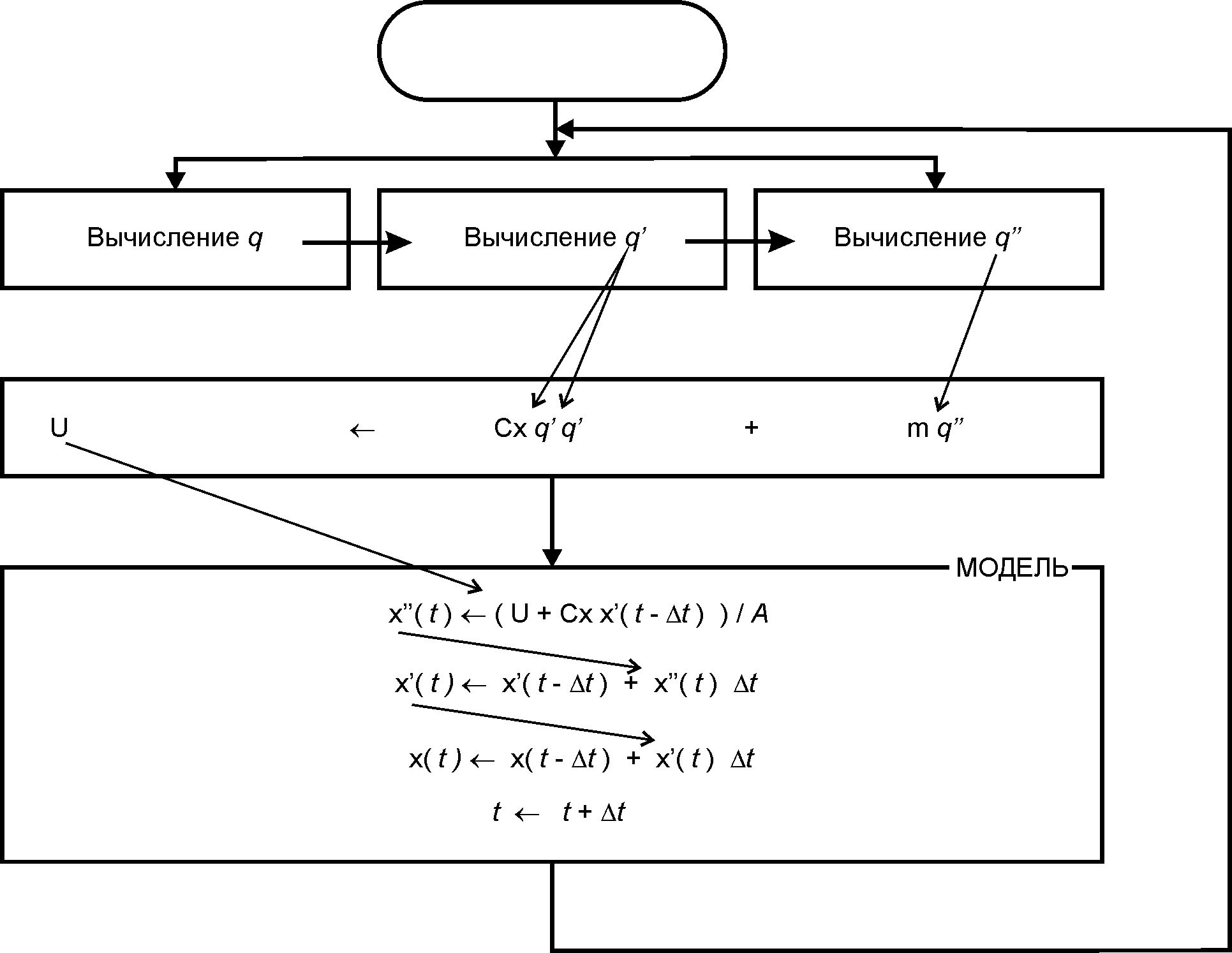


Рисунок 1.2 – Алгоритм применения формул (1.9) и (1.13).

Для одномерного случая получаем результаты отработки – перемещение на 10 метров объекта в воде, масса которого 10 кг. Результаты приведены на рисунках 1.3.

Рисунок 1.3 – Графики отработки перемещения на 10 метров

Двумерный случай: обе степени подвижности друг на друга не влияют. Результаты – рисунок 1.4.

Рисунок 1.4 – Результаты отработки для двумерного случая

По графикам видно, что отработка происходит удовлетворительно с перерегулированием менее 3%. С другой стороны, оба канала управления работают не синхронно и ОУ по координатам достигает целей не согласованно.

Рассмотрим более сложный плоский пример, где есть три степени подвижности и два привода, которые влияют друг на друга – см. схему «гантели» на рисунке 1.5

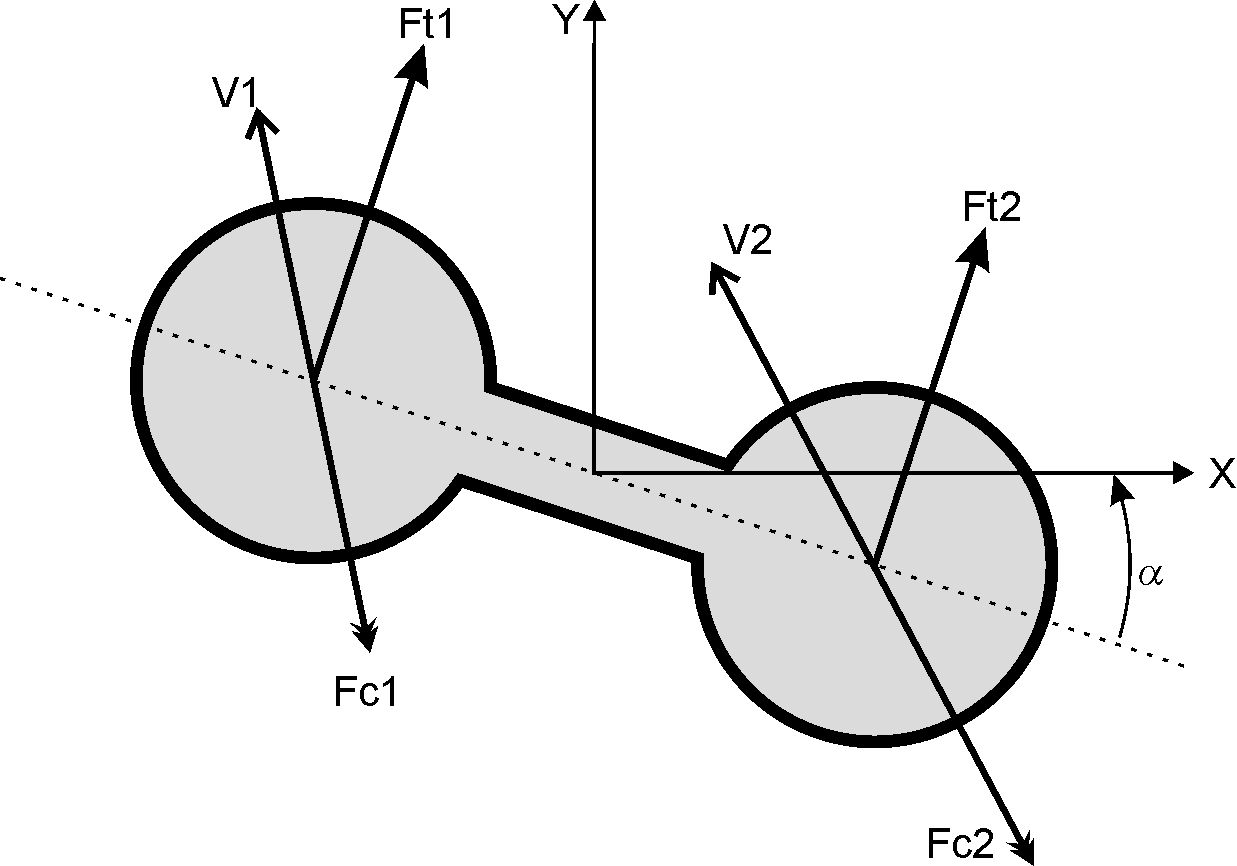


Рисунок 1.5 – Схема «гантели»

Здесь Ft1 и Ft2 – силы тяги (упоры) приводов, которые направлены ортогонально продольной оси аппарата (штриховая линия), V1 и V2 – скорости шаров и им противоположно направленные силы сопротивления среды Fc1 и Fc2. Для демонстрации всех деталей приведу полную схему построения модели и системы управления к ней.

Модель строится по методу уравнений Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим обобщённые координаты: это перемещение по оси абсцисс х, ординат у и поворот на угол α. Обобщённые силы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.14) |

где , и – обобщённые силы;

и - проекции упоров на оси координат;

– лобовое сопротивление при скорости 1 м/сек (то есть в формулу подставлена скорость *v* = 1 м/с);

- расстояние между центрами шаров.

Отсюда получаем уравнения движения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.15) |

где - момент инерции относительно начала координат.

Уравнения движения (1.15) используем в модели. Но из этих же уравнений получаем и значения упоров, предназначенных для выполнения целевых перемещений:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.16) |

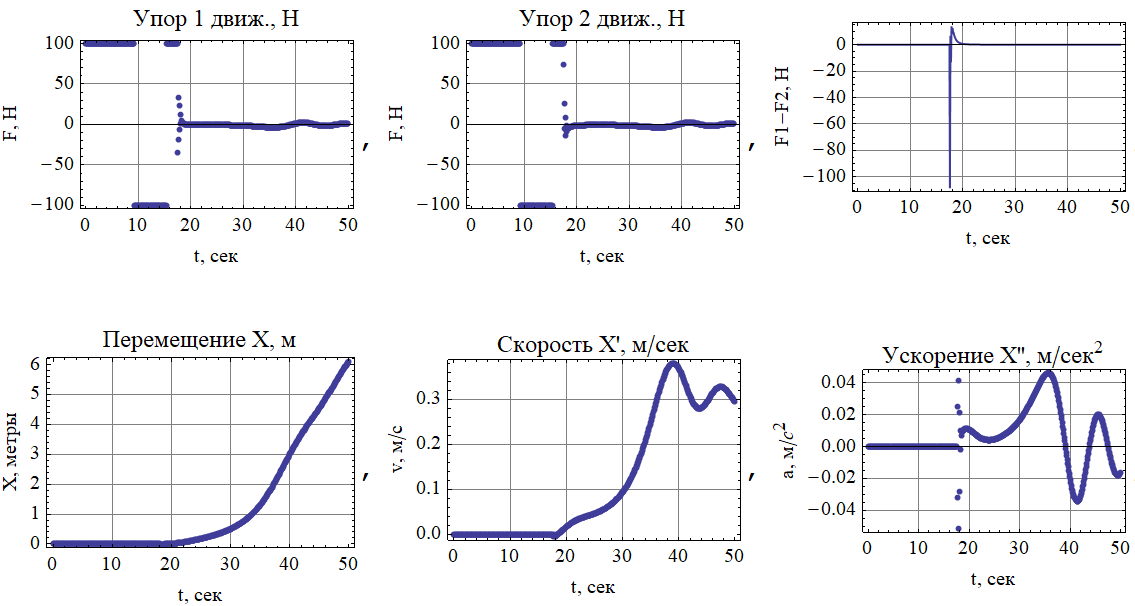
где c = *cos*(

Итак, для имитации управления в цикле выполняются три действия (по полной аналогии рисунка 1.2): 1) по заданной цели для каждой степени подвижности вычисляются фазовые траектории по формулам (1.7), 2) эти значения подставляются в формулы сил (1.16), 3) а они, в свою очередь, подставляются в формулы модели аппарата (1.15). И так далее, 1-2-3…

Рассмотрим выполнение задания перемещения аппарата на 65 метров по оси ординат и поворот на угол 45°. Результаты приведены на рисунке 1.6.

Анализ результатов показывает, что перемещение осуществлялось не одновременно с поворотом. Более того, перерегулирование достигло 20%, положение в целевом положении по оси ординат оказалось неустойчивым (после 30 секунд положение стало «уплывать»), а позиция по оси абсцисс сместилась на 6 метров, хотя задания такого не было.

Цели настоящей работы: описанными методами добиться согласованных движений по степеням подвижности, минимизировать паразитные движения и убрать перерегулирование и колебания для СУ сложными объектами управления.



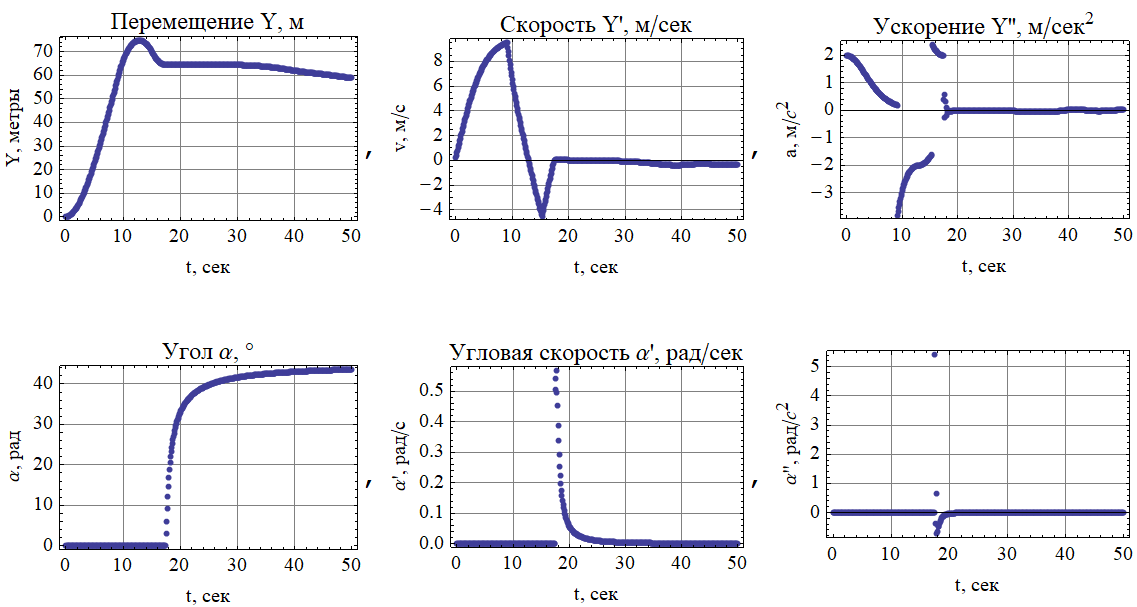


Рисунок 1.6 – Результаты отработки задания перемещения и поворота

1. - Упрощения, как и все преобразования в настоящей работе, выполнялись в системе Wolfram Mathematica [↑](#footnote-ref-1)